1.2 ΠΡΟΣΘΕΣΗ – ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΚΑΙ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΦΥΣΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΘΕΩΡΙΑ

1.
Πρόσθεση : Είναι μία πράξη, με την οποία όταν μας δώσουν δύο φυσικούς αριθμούς α και β βρίσκουμε έναν τρίτο αριθμό γ που τον συμβολίζουμε με $\alpha + \beta$ και τον ονομάζουμε άθροισμα των α και β.
Δηλαδή $\alpha + \beta = \gamma$.
Τους αριθμούς α και β τους ονομάζουμε προσθετέους

2 .
Αφαίρεση : Είναι μία πράξη , με την οποία όταν μας δοθούν δύο αριθμοί Μ και Α με $M > A$ μπορούμε να βρούμε έναν άλλο αριθμό Δ που τον συμβολίζουμε $M - A$ και τον ονομάζουμε διαφορά του Α από τον Μ
. Ο Δ είναι εκείνος ο αριθμός που αν τον προσθέσουμε στον Α μας δίνει τον Μ.
Δηλαδή αν $M - A = \Delta$ τότε $M = A + \Delta$
και αν $M = A + \Delta$ τότε $M - A = \Delta$
Ο αριθμός Μ ονομάζεται μειωτέος και ο Α αφαιρετέος

3 .
Πολλαπλασιασμός : Είναι μία πράξη με την οποία όταν μας δοθούν δύο αριθμοί α και β μπορούμε να βρούμε έναν άλλο αριθμό γ που τον συμβολίζουμε με $\alpha \cdot \beta$ και τον ονομάζουμε γινόμενο των αριθμών α και β, δηλαδή $\gamma = \alpha \cdot \beta$
Τους αριθμούς α και β τους ονομάζουμε παράγοντες.

4 .
Ουδέτερο στοιχείο : Στην πρόσθεση είναι το 0
Στον πολλαπλασιασμό είναι το 1

5 .
Αντιμεταθετική ιδιότητα : Στην πρόσθεση : $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
Στον πολλαπλασιασμό : $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$

6 .
Προσεταιριστική ιδιότητα : Στην πρόσθεση : $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$
Στον πολλαπλασιασμό : $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$

7.
Επιμεριστική ιδιότητα : Του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση
$α(β + γ) = α \cdot β + α \cdot γ$
Του πολλαπλασιασμού ως προς την αφαίρεση
$α(β - γ) = α \cdot β - α \cdot γ$

ΣΧΟΛΙΑ

1.
Ιδιότητα του 0 : $α + 0 = 0 + α = α$
δηλαδή αν σε οποιονδήποτε φυσικό προσθέσουμε το 0, ο φυσικός δεν μεταβάλλεται.

2.
Ιδιότητα του 1 : $α \cdot 1 = 1 \cdot α = α$
δηλαδή αν οποιονδήποτε φυσικό τον πολλαπλασιάσουμε με το 1, ο φυσικός δεν μεταβάλλεται.

3.
Δικαίωμα : Λόγω της αντιμεταθετικής ιδιότητας που ισχύει στην πρόσθεση μπορούμε σε ένα άθροισμα πολλών προσθετέων να αλλάζουμε την θέση κάποιου ή κάποιων προσθετέων

4.
Δικαίωμα : Λόγω της αντιμεταθετικής ιδιότητας που ισχύει στον πολλαπλασιασμό μπορούμε σε ένα γινόμενο πολλών παραγόντων να αλλάζουμε την θέση κάποιου ή κάποιων παραγόντων .

5.
Δικαίωμα : Λόγω της προσεταιριστικής ιδιότητας που ισχύει στην πρόσθεση μπορούμε σε ένα άθροισμα να αντικαθιστούμε δύο ή περισσότερους προσθετέους με το άθροισμά τους ή να αναλύουμε κάποιον ή κάποιους προσθετέους σε άθροισμα άλλων προσθετέων

6.
Δικαίωμα : Λόγω της προσεταιριστικής ιδιότητας που ισχύει στον πολλαπλασιασμό μπορούμε σε ένα γινόμενο να αντικαθιστούμε δύο ή περισσότερους παράγοντες με το γινόμενο τους, ή να αναλύουμε κάποιον ή κάποιους παράγοντες σε γινόμενο άλλων παραγόντων.

7.

Κάτι βολικό : Για να πολλαπλασιάσουμε έναν φυσικό με 10 , 100, 1000 κλπ προσθέτουμε στο τέλος του αριθμού 1, 2, 3 κλπ μηδενικά

8.

Προτεραιότητα : Αν σε μία αριθμητική παράσταση είναι σημειωμένες διαδοχικές προσθαφαιρέσεις, τότε ξεκινάμε εκτελώντας τις πράξεις όπως τις συναντάμε μία – μία από τα αριστερά προς τα δεξιά.

9.

Προτεραιότητα : Αν σε μία αριθμητική παράσταση είναι σημειωμένες πράξεις πολλαπλασιασμού και προσθαφαιρέσεις τότε ξεκινάμε εκτελώντας πρώτα τους πολλαπλασιασμούς και μετά συνεχίζουμε όπως στο 8

10.

Προτεραιότητα : Αν σε μία αριθμητική παράσταση υπάρχουν παρενθέσεις τότε εκτελούμε τις πράξεις πρώτα μέσα στις παρενθέσεις και μετά συνεχίζουμε όπως στα 8 – 9

11.

Ανάποδα η επιμεριστική : Πολλές φορές για λόγους ευκολίας στην εκτέλεση των πράξεων, τις παραστάσεις

$\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$ ή $\alpha \cdot \beta - \alpha \cdot \gamma$

τις γράφουμε $\alpha(\beta + \gamma)$ ή $\alpha(\beta - \gamma)$ και ακολουθούμε το 10

12.

Δίδυμη επιμεριστική : $(\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta$ ή δηλαδή για να βρω το παραπάνω εξαγόμενο πολλαπλασιάζω κάθε προσθετέο της μίας παρένθεσης με όλους τους προσθετέους της άλλης και προσθέτω τα γινόμενα

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 .

Να γίνουν οι πράξεις

α) $35 - (22 - 9)$ **β)** $(35 - 22) + 9$ **γ)** $35 - 22 + 9$

Προτεινόμενη λύση

α) $35 - (22 - 9) = 35 - 13 = 22$

β) $(35 - 22) + 9 = 13 + 9 = 22$

γ) $35 - 22 + 9 = 13 + 9 = 22$

Σχόλια 8 -10

2.

Να γίνουν οι πράξεις :

α) $38 - 15 - 4 + 36 - 2$

β) $2 \cdot 16 + 4 \cdot 5 - 17 + 9$

γ) $3 \cdot (25 - 8) - 4 \cdot (5 + 2) + 2 \cdot 3$

Προτεινόμενη λύση

Σχόλια 8 -9-10

α) $38 - 15 - 4 + 36 - 2 = 23 - 4 + 36 - 2 =$
$=19 + 36 - 2 = 55 - 2 = 53$

β) $2 \cdot 16 + 4 \cdot 5 - 17 + 9 = 32 + 20 - 17 + 9 =$
$= 52 - 17 + 9 = 35 + 9 = 44$

γ) $3 \cdot (25 - 8) - 4 \cdot (5 + 2) + 2 \cdot 3 = 3 \cdot 17 - 4 \cdot 7 + 2 \cdot 3 =$
$= 51 - 28 + 6 = 23 + 6 = 29$

3.

Να υπολογίσεις με δύο τρόπους την τιμή των παραστάσεων

α) $5(17 + 3)$ **β)** $15(17 - 7)$ **γ)** $(2 + 8)(16 + 4)$

Προτεινόμενη λύση

Σχόλια 10-12
Θεωρία 7

α) Α΄ τρόπος : $5 \cdot (17 + 3) = 5 \cdot 20 = 100$
Β΄ τρόπος : $5 \cdot (17 + 3) = 5 \cdot 17 + 5 \cdot 3 = 85 + 15 = 100$

β) Α΄ τρόπος : $15 \cdot (17 - 7) = 15 \cdot 10 = 150$
Β΄ τρόπος : $15 \cdot (17 - 7) = 15 \cdot 17 - 15 \cdot 7 = 255 - 105 = 150$

γ) Α΄ τρόπος : $(2 + 8) \cdot (16 + 4) = 10 \cdot 20 = 200$
Β΄ τρόπος : $(2 + 8) \cdot (16 + 4) = 2 \cdot 16 + 2 \cdot 4 + 8 \cdot 16 + 8 \cdot 4 =$
$= 32 + 8 + 128 + 32 = 40 + 160 = 200$

4.

Να γίνουν οι πράξεις

α) 357·7 + 357·3 **β)** 489·123 – 489·23 **γ)** 376 ·1010 **δ)** 543· 999

Προτεινόμενη λύση

Σχόλια 5-7-11

α) 357·7 + 357·3 = 357·(7 + 3) = 357· 10 = 3570

β) 489·123 – 489·23 = 489·(123 – 23) = 489·100 = 48900

γ) 376 ·1010 = 376·(1000 + 10) = 376 ·1000 + 376 ·10 = 376000 + 3760 = 379760

δ) 543· 999 = 543·(1000 – 1) = 543·1000 – 543·1 = 543000 – 543 = 542457

5.

Να υπολογιστεί το άθροισμα φυσικών αριθμών από το 1 μέχρι το 1000

Σ = 1 + 2 + 3 + . . . + 998 + 991 + 1000

Προτεινόμενη λύση

Σχόλιο 5

Πάμε όπως και ο Γκάους

Ζευγαρώνουμε πρώτον – τελευταίον
δεύτερον – προτελευταίον
κ.λ.π

Σ = (1 + 1000) + (2 + 999) + (3 + 998) + . . . + (500 + 501)

Το πλήθος των παρενθέσεων είναι 500 , αφού ζευγαρώσαμε χίλιους αριθμούς.
Επίσης κάθε παρένθεση δίνει άθροισμα 1001.

Άρα Σ = 500·1001 = 500500

6.

Να συμπληρώσετε τα τετράγωνα ώστε να γίνουν μαγικά

α)

6		
	7	
9		8

β)

10		
5	9	
12		

Προτεινόμενη λύση

α)

Το σταθερό άθροισμα στο πρώτο τετράγωνο είναι
6 + 7 + 8 = 21

Ο αριθμός που λείπει στο πρώτο κουτί της δεύτερης σειράς είναι ο 21 – (6 + 9) = 21 – 15 = 6

Στο τρίτο κουτί της 2ης σειράς λείπει ο 21 – (6 + 7) = 21 – 13 = 8

Ομοίως συνεχίζοντας συμπληρώνουμε το τετράγωνο.

6	10	5
6	7	8
9	4	8

β)

Το σταθερό άθροισμα στο 2ο τετράγωνο είναι
10 + 5 + 12 = 27

Ο αριθμός που λείπει στο τρίτο κουτί της διαγωνίου είναι ο 27 – (10 + 9) = 27 – 19 = 8

Ομοίως συνεχίζοντας συμπληρώνουμε το τετράγωνο.

10	11	6
5	9	13
12	7	8

7.

Να συμπληρωθούν τα κενά

α)

52	−		=	18
−		−		+
33	−	25	=	
||		||		||

β)

	…	5	7	3
−		…	6	…
	3	4	…	5

Προτεινόμενη λύση

α) εύκολα συμπληρώνουμε τα κενά στο σχήμα (α) όπως φαίνεται παρακάτω

β) Επειδή δεν υπάρχει φυσικός που όταν αφαιρείται το 3 αφήνει υπόλοιπο 5, δανειζόμαστε μία δεκάδα, δηλαδή 10 μονάδες τις οποίες προσθέτουμε στο 3, αυτό γίνεται 13 και αφαιρώντας το 8 βρίσκουμε υπόλοιπο 5.
Επομένως στο τελευταίο κουτί της δεύτερης σειράς είναι το 8.
Λόγω του δανείου που κάναμε οι 7 δεκάδες γίνονται 6. Οπότε αφαιρώντας, από αυτές, τις 6 δεκάδες του αφαιρετέου, βρίσκουμε υπόλοιπο 0.
Έτσι λοιπόν το ψηφίο που λείπει στην τελευταία σειρά είναι το 0.
Προφανώς το πρώτο ψηφίο της δεύτερης σειράς είναι το 1 και το ψηφίο που λείπει από την πρώτη σειρά είναι το 3.

α)

52	−	34	=	18
−		−		+
33	−	25	=	8
|| 19		|| 9		|| 26

β)

	3	5	7	3
−		1	6	8
	3	4	0	5

8.

Ένα ανθοπωλείο διαθέτει 290 γαρύφαλλα , 190 τριαντάφυλλα και 60 γλαδιόλες. Δέχτηκε μία παραγγελία για 38 ανθοδέσμες , που η κάθε μία πρέπει να αποτελείται από 7 γαρύφαλλα, 5 τριαντάφυλλα και 2 γλαδιόλες . Να εξετάσετε αν επαρκούν τα λουλούδια που διαθέτει το ανθοπωλείο για να γίνουν οι ανθοδέσμες .
Σε κάθε περίπτωση να βρείτε αν θα περισσέψουν λουλούδια στο ανθοπωλείο ή αν τα διαθέσιμα δεν επαρκούν. Πόσα πρέπει να παραγγείλει στον προμηθευτή του για να εκτελεστεί η παραγγελία;

Προτεινόμενη λύση

Τα γαρύφαλλα σε όλες τις ανθοδέσμες θα είναι $7 \cdot 38 = 266$
Οπότε επαρκούν τα υπάρχοντα και θα περισσέψουν $290 - 266 = 24$

Τα τριαντάφυλλα σε όλες τις ανθοδέσμες θα είναι $5 \cdot 38 = 190$
Οπότε επαρκούν τα υπάρχοντα και δεν περισσεύει κανένα.

Οι γλαδιόλες σε όλες τις ανθοδέσμες θα είναι $2 \cdot 38 = 76$
Άρα δεν επαρκούν οι υπάρχουσες. Θα πρέπει επομένως να παραγγείλει στον προμηθευτή ακόμα $76 - 60 = 16$ γλαδιόλες

9 .

Αν $α = 15$, $β = 18$ και $γ = 13$, να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης
$Π = (α + β)\,(78 – 28) + (\,β – γ)\,(\,14 + 6) – (α + β + γ)$

Προτεινόμενη λύση

Κάνοντας αντικατάσταση των γραμμάτων με τις τιμές τους βρίσκουμε ότι

$Π = (15 + 18)\,(78 – 28) + (\,18 – 13)\,(\,14 + 6) – (15 + 18 + 13\,) =$
$= 33·50 + 5·20 – 46 =$
$= 1650 + 100 – 46 = 1750 – 46 = 1704$

Σχόλια 8 – 9 – 10

10.

Αν $α + β = 17$, $κ + λ = 35$, να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων
i) $α + 3 + β$, **ii)** $α + κ + β + λ + 14$

Προτεινόμενη λύση

Σχόλια 3 -5

i) $α + 3 + β = α + β + 3 = (\,α + β) + 3 = 17 + 3 = 20$

ii) $α + κ + β + λ + 14 = α + β + κ + λ + 14 =$
$= (\,α + β) + (\,κ + λ) + 14 =$
$= 17 + 35 + 14 = 66$

11.

Αν $α = 15 + 2·4 –7$ και $β = 2(\,7 + 3) – 5·3 + 1$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $Π = 16 + α + 12 + β$

Προτεινόμενη λύση

Σχόλια 8-9-10

$α =15 + 2·\,4 –7 = 15 + 8 –7 = 23 –7 = 16$
$β = 2(\,7 + 3) –5·3 + 1 = 2·\,10 –5·3 + 1 =$
$= 20 –15 + 1 = 5 + 1= 6$
Άρα $Π = 16 + 16 + 12 + 6 = 50$

12.

Ένα λεωφορείο ξεκινάει από την αφετηρία με 40 επιβάτες. Στην 1η στάση κατέβηκαν 2 και ανέβηκαν 12 επιβάτες. Στη 2η στάση κατέβηκαν 5 και ανέβηκαν 7. Στην 3η στάση κατέβηκαν 12 και ανέβηκαν 2. Η επόμενη στάση ήταν το τέρμα. Πόσοι επιβάτες κατέβηκαν στο τέρμα ;

Προτεινόμενη λύση

Το πλήθος των επιβατών που ανέβηκαν στο λεωφορείο ήταν $40 + 12 + 7 + 2 = 61$
Το πλήθος των επιβατών που κατέβηκαν στις στάσεις ήταν $2 + 5 + 12 = 19$
Άρα στο τέρμα της διαδρομής κατέβηκαν $61 – 19 = 42$ επιβάτες

13.

Σε μια πόλη υπάρχουν 3 γυμνάσια. Μερικά δεδομένα από τα σχολεία αυτά φαίνονται στον πίνακα

	Αγόρια	Κορίτσια	Σύνολο
1^o γυμνάσιο	87		153
2^o γυμνάσιο	72	94	
3^o γυμνάσιο		63	133
Σύνολο	229		

α) Να συμπληρώσετε τα κενά του πίνακα
β) Το πρώτο γυμνάσιο πηγαίνει σε κινηματογράφο 500 θέσεων. Πόσες θέσεις θα μείνουν κενές ;
γ) Το 2^o γυμνάσιο πηγαίνει εκδρομή και για την μετακίνηση τους κάλεσαν 3 πούλμαν 50 θέσεων το κάθε ένα και ένα πούλμαν 20 θέσεων.
Επαρκούν τα πούλμαν για την μετακίνηση των παιδιών και των 4 συνοδών καθηγητών τους;
δ) Τα παιδιά του 3ου γυμνασίου, μετέχοντας στον έρανο που έγινε για να βοηθηθούν οι άποροι της πόλης τους έδωσαν από 2 € το κάθε ένα.
Πόσα χρήματα συγκεντρώθηκαν ;

Προτεινόμενη λύση

α)

Στο κενό της πρώτης γραμμής λείπει ο αριθμός $153 – 87 = 66$
Στο κενό της πρώτης στήλης λείπει ο αριθμός $229 – (87 + 72) = 229 –159 = 70$
Στο κενό της δεύτερης γραμμής λείπει ο αριθμός $72 + 94 = 166$
Στο τελευταίο κενό της τρίτης γραμμής λείπει ο αριθμός $70 + 63 = 133$
Στο πρώτο κενό της τελευταίας γραμμής λείπει ο αριθμός $66 + 94 + 63 = 223$
Στο τελευταίο κενό της τελευταίας γραμμής λείπει ο αριθμός $229 + 223 = 452$

Συμπληρωμένος ο πίνακας φαίνεται παρακάτω

	Αγόρια	Κορίτσια	Σύνολο
1^o γυμνάσιο	87	66	153
2^o γυμνάσιο	72	94	166
3^o γυμνάσιο	70	63	133
Σύνολο	229	223	452

β)

Θα μείνουν κενές $500 –153 = 347$

γ)

Το σύνολο των θέσεων στα πούλμαν είναι $3 \cdot 50 + 20 = 150 + 20 = 170$
Τα παιδιά με τους συνοδούς είναι $166 + 4 = 170$
Επομένως οι θέσεις επαρκούν ακριβώς

δ)

Τα χρήματα που συγκεντρώθηκαν είναι $133 \cdot 2 = 266$ €